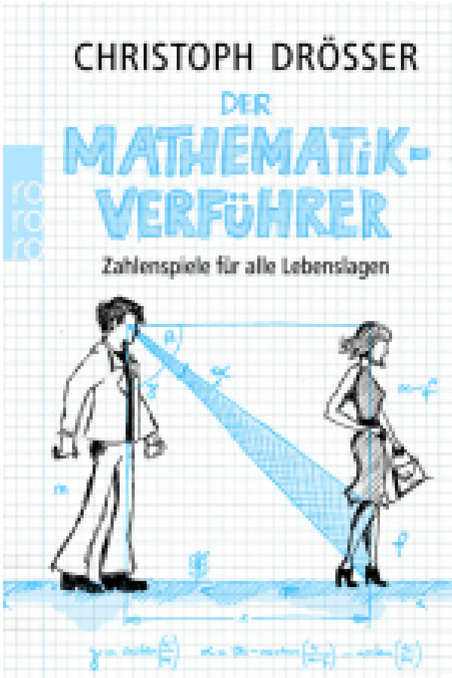
Leseprobe aus:

Christoph Drösser

Der Mathematikverführer



Mathematik muss kein nerviges und sperriges Zahlenwerk sein, mit dem sich Schüler, Lehrer, Eltern und wir alle immer wieder abquälen – eigentlich kommen ihre Grundlagen ja aus dem praktischen Alltagsleben und die Beschäftigung damit kann richtig Spaß machen. Das beweist Christoph Drösser in diesem Buch. Viele der grundlegenden mathematischen Verfahren und Operationen sind einmal entstanden, um ganz praktische Probleme zu lösen. Christoph Drösser nutzt dies aus und erklärt gängige Rechenverfahren wie den Dreisatz, die Bruchrechnung oder die Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand von einleuchtenden und oft überraschenden Alltagsbeispielen.
«So hätte uns der Schulunterricht gefallen: Mathe als Lösung für drängende Fragen …» *Chrismon*

Christoph Drösser, geboren 1958, studierte in Bonn Mathematik und Philosophie. Er ist Redakteur im Ressort Wissen bei der «Zeit». Von 2004 bis 2006 entwickelte er als Chefredakteur das Magazin «Zeit Wissen». 2005 kürte ihn das Medium-Magazin zum «Wissenschaftsjournalisten des Jahres».
Bei rororo erschienen bereits von Christoph Drösser: «Der Traum von der Unsterblichkeit» (1996), «Stimmt's?», Folge 1–5 (1998–2005); «Das Lexikon der Wetterirrtümer» (gemeinsam mit Jörg Kachelmann, 2006); «Wenn die Röcke kürzer werden, wächst die Wirtschaft. Die besten modernen Legenden» (2008). Bei Rotfuchs erschienen: «Stimmt's? Freche Fragen, Lügen und Legenden für clevere Kids» (2001), «Wie groß ist unendlich?» (2005) und «Wie fragt man Löcher in den Bauch?» (Hg., 2003).

CHRISTOPH DRÖSSER

DER MATHEMATIK-VERFÜHRER

ZAHLENSPIELE FÜR ALLE LEBENSLAGEN

ROWOHLT TASCHENBUCH VERLAG

For Andrea,
my lucky number

Veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag,
Reinbek bei Hamburg, Dezember 2008

Umschlaggestaltung ZERO Werbeagentur, München
(Illustration: FinePic München, Jana Bischoff)
Typographie und Layout nach Kurt Blank-Markard
Satz Minion PostScript (InDesign) bei
Pinkuin Satz und Datentechnik, Berlin
Druck und Bindung CPI – Clausen & Bosse, Leck
Printed in Germany
ISBN 978 3 499 62426 1

INHALT

satz-Rechnung ist sogar schon einmal eine Frau gescheitert, Marilyn vos Savant, die als intelligenteste Frau der Welt gilt. Sie hatte sich mit Hühnern vertan. Aber das war in Wahrheit eine Denksportaufgabe. **27**

DURCHSCHNITTSVERDIENER

ODER AB DURCH DIE MITTE Gehaltsverhandlungen in der Firma Brauner Elektronik. Die Mitarbeiter verdienen im Schnitt 2 850 Euro. Zu wenig, findet der Betriebsrat und fordert Nachbesserung. Denn der Durchschnittsverdienst in der Branche liegt bei 3 000 Euro. Doch was genau beschreibt der Durchschnitt eigentlich? Verdient der «typische» Mitarbeiter bei Brauner 2 850 Euro? Nein, die meisten bekommen deutlich weniger. **35**

DAS HEIRATSPROBLEM

ODER … OB SICH NICHT DOCH WAS BESSERES FINDET Marina ist eine begehrenswerte Frau. Gerade hat Karsten ihr einen Heiratsantrag gemacht. Ganz romantisch. Doch Marina zögert. Nicht zum ersten Mal. Es könnte ja noch ein Besserer kommen. Klarer Fall von Traumprinz-Syndrom, meint ihre Freundin. Dabei lässt sich die Wahrscheinlichkeit sogar berechnen, welcher Bewerber aus einer bestimmten Anzahl von Interessenten der beste sein dürfte. Eine mathematische Liebeshilfe. **47**

DER ERRECHNETE WAHLSIEG

ODER WENIGER IST MANCHMAL MEHR Dicke Luft in Hoppenstadt. Da wegen einer Gebietsreform die Wahlkreise neu zugeschnitten werden müssen, sieht die Bürgerpartei ihre Chancen schwinden. Da ist Kreativität gefordert. Denn es ist durchaus möglich, mit weniger Stimmen mehr Mandate zu erringen. Ebenso ist es möglich, durch zu viele Stimmen

FRAUENFRAGEN

ODER MEHR IST MANCHMAL WENIGER Die Frauenbeauftragte der Erlanger Hochschule für Übersetzungswesen ist alarmiert. Die neuesten Zulassungszahlen belegen nachdrücklich, dass Frauen bei der Auswahl benachteiligt werden. Nur 31 Prozent der weiblichen Bewerber wurden angenommen, gegenüber 47 Prozent bei den Männern. Aber in jedem einzelnen Fachbereich wurden prozentual mehr Bewerberinnen zugelassen. Ein Paradox namens Simpson. **111**

MÄNNERPHANTASIEN

ODER BIER, BEINE UND ANDERE EXTREME Frühlingserwachen am Elbstrand. Kolja und Jens genießen die ersten Sonnenstrahlen und die ersten Frauenbeine der Saison. Wenn nur die im Sand abgestellte Bierdose nicht immer umkippen würde. Wann die Dose den sichersten Stand hat und aus welcher Entfernung man ein Frauenbein am besten in den Blick nehmen kann, hilft die Analysis herauszufinden. Aber Vorsicht! Das sind «Extremwertaufgaben». **112**

ZEIT IST GELD

ODER EIN VERLOCKENDES ANGEBOT Die Beraterin der Sparbank, Frau Weichmann, bietet sagenhafte Konditionen. Aber welche der verlockenden Varianten – «klassisch», «geradlinig» oder «dynamisch» – ist tatsächlich die beste? Um das herauszufinden, gilt es, zwischen linearem, quadratischem und exponentiellem Wachstum zu unterscheiden. Im Endeffekt ist das exponentielle Wachstum unschlagbar. Das musste auch der Viktoriasee erfahren. **123**

ROUTENPLANUNG

ODER MINISTER AUF REISEN Außenminister sind viel unterwegs. Wie aber findet man für eine Antrittsreise in

KEINE ANGST VOR GROSSEN ZAHLEN

ODER SECHS MOLEKÜLE VON GOETHE

«Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, sie unterhaltsamer zu gestalten.»
Blaise Pascal (1623–1662)

«Mehr Licht!», soll Johann Wolfgang von Goethe gesagt haben, bevor er seinen letzten Atemzug tat. Dann entschlief der große deutsche Dichter.
Der letzte Atemzug Goethes – gewiss ein kostbarer Hauch für eingefleischte Fans des Geheimrats (und vielleicht eine unappetitliche Vorstellung für andere). Aber wo ist er hin? Ist in der Luft, die wir hier und heute in unsere Lungen ziehen, ein Molekül enthalten, das Goethe einmal ausgeatmet hat? Vielleicht sogar eines aus diesem einen, letzten Atemzug?
Man kann über so eine Frage ins Philosophieren verfallen. Oder aber ins Rechnen. Die wenigsten Leute kommen auf die letztere Idee – dabei ist die Sache gar nicht so schwierig, wenn man ein paar grundlegende Zahlenwerte kennt.
Manche erinnern sich vielleicht noch aus der Schule an die Einheit «Mol». Ein Mol eines Stoffes ist eine Menge von $6 \cdot 10^{23}$ Molekülen. Also 600 000 000 000 000 000 000 000 Moleküle. Solche Einheiten braucht man im Umgang mit diesen winzigen Bausteinen der Materie.
Für Gase aller Art gilt: Bei normalem atmosphärischem Druck hat ein Mol des Gases ein Volumen von etwa 25 Litern. Ein Atemzug – zum Beispiel der letzte von Goethe – hat etwa ein

Volumen von einem Liter, enthält also ein fünfundzwanzigstel Mol oder $2,4 \cdot 10^{22}$ Moleküle. Wir atmen im Durchschnitt vielleicht 20-mal pro Minute, das macht in 83 Jahren (so alt wurde Goethe) $20 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 83 = 872\,496\,000$ Atemzüge – oder aber $2 \cdot 10^{31}$ Moleküle. (Hier steckt schon mal eine grobe Vereinfachung drin: Sicher hat Goethe eine Menge der Moleküle zweimal ein- und ausgeatmet, insbesondere wenn nachts das Fenster geschlossen war).

Man kann davon ausgehen, dass sich die Luft in unserer Atmosphäre seit Goethes Tod sehr gut durchmischt hat und deshalb in jedem Liter Luft etwa gleich viele Goethe-Moleküle enthalten sind. Wie viel Luft enthält die Atmosphäre? Ihre Masse, das habe ich irgendwo nachgelesen, beträgt $5 \cdot 10^{21}$ Gramm. Ein Mol Luft wiegt etwa 30 Gramm. Das macht also $5 \cdot 10^{21} : 30 = 1,7 \cdot 10^{20}$ Mol Luft – oder auch die unvorstellbar große Zahl von 10^{44} Molekülen.

Nun haben wir alle Zahlen zusammen für die finale Rechnung: Wir dividieren die Zahl aller Luftmoleküle durch die Zahl der Goethe-Moleküle und erhalten: Eines von $5 \cdot 10^{12}$ (oder 5 Billionen) Luftmolekülen hat Goethe irgendwann mal geatmet, eines von $4 \cdot 10^{21}$ Molekülen war sogar in jenem letzten Atemzug. Da wir, wie schon Goethe, mit jedem Atemzug $2,4 \cdot 10^{22}$ Moleküle einatmen, sind darunter im Durchschnitt 5 Milliarden Moleküle, die Goethe irgendwann einmal geatmet hat – und 6 Moleküle aus dem Atemzug, mit dem der Dichter sein Leben aushauchte. Im Durchschnitt. Auf ähnliche Weise kann man übrigens die Zahl der Moleküle in einem Glas Wasser berechnen, die irgendwann einmal durch Goethes Körper gegangen sind.

Sechs Moleküle aus Goethes letztem Hauch in jedem Liter Luft, den wir einatmen! Da atmet man gleich sehr viel ehrfürchtiger. Zwar ist die ganze Rechnung eine ziemliche Spinnerei. Ich habe sehr grobe Schätzungen vorgenommen und das Ergebnis bei jedem Schritt großzügig auf- oder abgerundet. Aber darum geht es gar nicht. Gefragt war hier nach der Größenordnung: Ob es plausibel ist, dass wir ständig Goethe-Moleküle einatmen. Und das ist es offenbar – egal ob es nun 6 sind oder 2 oder 20.

Die Fragestellung ist natürlich völlig irrelevant, aber die Beschäftigung mit solchen Zahlen gibt uns ein Gefühl für Größenordnungen. Und ein solches Gefühl zu haben ist wichtig, spätestens wenn es um Geld geht: Es ist eben nicht egal, ob man 100 oder 10 000 Euro ausgibt. Wir hatten einmal einen Wirtschaftsminister, der auf die Frage eines Reporters, wie viele Nullen eine Milliarde hat, raten musste: «Ach du lieber Gott! Sieben? Acht?» Es sind neun, Herr Bangemann!

Nun kann es jedem einmal die Sprache verschlagen, wenn er plötzlich eine Fernsehkamera oder ein Mikrofon auf sich gerichtet sieht. Ein bisschen Bedenkzeit muss schon erlaubt sein. Aber vielen Politikern muss man leider zutrauen, dass sie es tatsächlich nicht wissen. Und trotzdem täglich über Beträge mit sieben, acht oder neun Nullen entscheiden.

Auch wenn wir ständig in den Nachrichten mit Berichten über Milliarden-Beträge überschüttet werden – ein richtiges Gefühl dafür, wie groß so eine Milliarde ist, haben die wenigsten Menschen. Psychologen haben das Verhältnis der Menschen zum Geld untersucht und festgestellt, dass sie bis etwa 500 000 (damals waren es noch D-Mark) noch eine sinnliche Vorstellung von der Höhe der Beträge haben («Eigenheim» antworten sie auf die Frage, was man dafür kaufen kann), aber dann hört es auf. Ein Minister mag dafür kämpfen, in diesem Jahr einen Etat von 21 Milliarden Euro zu bekommen, weil es letztes Jahr 20 Milliarden waren – aber ob er sich den Betrag wirklich vorstellen kann, darf man getrost bezweifeln.

Aber auch wenn große Zahlen das sinnlich Fassbare oft übersteigen, ist es nicht nur für Minister sinnvoll, den Umgang mit ihnen zu üben, um sie auf Plausibilität überprüfen zu können, indem man sie mit anderen, bekannten Größen vergleicht. Das Rechnen mit ihnen ist eigentlich genauso einfach wie das Rechnen mit kleineren Zahlen, wie man an dem Goethe-Beispiel sehen konnte (dabei waren die Exponenten sehr nützlich: Näheres dazu steht im Anhang auf S. 223).

Ein Beispiel zum Thema Geld: Nehmen wir an, der Vorstandsvorsitzende der Deutschen Bank, Josef Ackermann, sitzt an seinem Computer und arbeitet. Da erspäht er vor der Tür seines Büros einen 5-Euro-Schein auf dem Gang, den jemand verloren hat. Lohnt es sich für Ackermann, aufzustehen und den Geldschein aufzuheben? Dabei nehmen wir an, dass er in der Zeit, die er nicht am Computer sitzt, kein Geld verdient (was natürlich Unsinn ist). Die Frage ist also eigentlich: Wie lange muss Herr Ackermann für 5 Euro arbeiten? Schätzen Sie erst einmal, bevor Sie es ausrechnen!

Im Jahr 2006 hat Ackermann etwa 12 Millionen Euro verdient. Das ist eine Menge Geld. Wir nehmen zu seinen Gunsten an, dass er dafür pro Woche 60 Stunden gearbeitet und keinen Urlaub genommen hat. Dann ergibt sich, bei 52 Wochen, ein Stundenlohn von 3 846 Euro. Runden wir die Zahl noch einmal ab und sagen 3 600 Euro. Das heißt: Jede Sekunde verdient Josef Ackermann einen Euro. Damit es sich lohnt, den 5-Euro-Schein aufzuheben, darf die Aktion also nicht länger als 5 Sekunden dauern. Sputen Sie sich, Herr Direktor!

Ein anderer Vergleich, der verdeutlicht, wie viel unsere Spitzenmanager verdienen: Herr Ackermann muss 345 Sekunden oder knapp 6 Minuten arbeiten, bis er den Hartz-IV-Regelsatz von 345 Euro beisammen hat. Apropos Hartz IV: Schätzen Sie doch bitte noch einmal, wie viele Hartz-IV-Empfänger man für den Preis eines Eurofighters ein Jahr lang mit dem Regelsatz versorgen kann? 180, 1 800 oder 18 000?

Ein Eurofighter kostet den Steuerzahler 75 Millionen Euro. Geteilt durch den Regelsatz, geteilt durch 12 – macht ungefähr 18 000. Das ist die Zahl sämtlicher Hartz-IV-Empfänger in einer Stadt wie Bochum. Nun gut, das kann man nicht gegeneinander aufrechnen. So ein Jet muss ja auch sein. Deutschland hat aber nicht einen dieser Flieger bestellt, sondern 180.
Man kann gewiss politisch argumentieren, dass diese Rechnung demagogisch sei und Äpfel mit Birnen vergleiche. Dass wir die modernen Kampfjets zu unserer Verteidigung dringend bräuchten und der Preis gerechtfertigt sei. Das mag ja vielleicht so sein, die Rechnung stimmt aber trotzdem. Und wer sich für derartige Investitionen einsetzt, der darf nicht nur qualitativ argumentieren («Wir brauchen das, weil …»), sondern sollte auch quantitativ überzeugen: «Wir können uns diese Ausgabe leisten.» Und dann muss er sich auf einen entsprechenden Äpfel-Birnen-Vergleich einlassen, weil jeder Euro eben nur einmal ausgegeben werden kann.

MUT ZUR UNGENAUIGKEIT Stellen Sie sich – noch ein Beispiel – folgendes Spiel vor: Jemand hat am Rand der Autobahn von Hamburg nach Berlin eine zwei Zentimeter breite und zwei Meter hohe Latte in den Boden geschlagen. Irgendwo zwischen Hamburg und Berlin, Sie haben keine Ahnung, wo. Sie fahren die Strecke nachts mit dem Auto und haben eine Pistole dabei. Zu einem beliebigen Zeitpunkt, den Sie frei wählen können, kurbeln Sie die Fensterscheibe herunter und schießen in Richtung Straßenrand. Einmal. Wenn Sie die Latte treffen, haben Sie gewonnen.
Würden Sie auch nur einen Euro auf dieses Spiel wetten, selbst wenn der Gewinn im Fall eines Treffers eine Million betrüge? Nein? Genau das machen aber Millionen von Menschen jede Woche, wenn sie einen Lottoschein ausfüllen. Die Chance, sechs Richtige zu tippen, ist nämlich genauso groß wie die

Aussicht des nächtlichen Schützen, die Latte zu treffen, etwa 1 zu 14 Millionen. Viel Glück weiterhin!

Wir haben auch für Wahrscheinlichkeiten nur wenig Intuition. Je nachdem, wie ein Problem formuliert ist, täuschen wir uns über unsere Chancen. Auch da hilft letztlich nur eines: Ausrechnen, zumindest überschlagsweise.

In der Schule wurde von uns erwartet, genau zu rechnen. Da genügte auf die Frage «Wie viel ist 7 mal 14?» nicht die Antwort «Ungefähr 100!» – die Lehrerin wollte die exakte Lösung hören, nämlich 98.

Für die meisten praktischen Fälle aber ist 7 mal 14 ungefähr 100, die Kreiszahl π ist 3 (statt 3,14…, siehe S. 205), die Erdbeschleunigung 10 m/s^2 (statt 9,81). Exakte Werte sind nur notwendig, wenn es auf wirkliche Präzision und feine Unterschiede ankommt. Im Sport beispielsweise wollen wir nicht wissen, ob jemand die 100 Meter in «ungefähr 10 Sekunden» gelaufen ist – da liegen zwischen 9,8 und 10,4 Sekunden ganze Klassen.

Beim Rechnen mit Größenordnungen ist Präzision dagegen oft eine Scheinpräzision. Der Statistiker Walter Krämer bringt gern das Beispiel einer Tabelle aus einer britischen Publikation, die die Zahl der zivilen Opfer des 2. Weltkriegs auflistet:

Zivilisten		
Alliierte	Großbritannien	60 595
	Belgien	90 000
	China	gewaltige Anzahl
	Dänemark	unbekannt
	Frankreich	152 000
	Niederlande	242 000
	Norwegen	3 638
	UdSSR	6 000 000
		6 548 233

Feinde	Deutschland	500 000
	Österreich	125 000
	Italien	180 000
	Japan	600 000
	Polen	5 300 000
	Jugoslawien	beträchtliche Anzahl
		6 705 000

Insbesondere die erste Tabelle ist natürlich völlig unsinnig, weil sie präzise Zahlen (Norwegen) mit ungefähren (Belgien) oder gar nicht bekannten vermischt. Bei solchen Additionen kommt immer eine scheinbar exakte Zahl heraus, die unser Vertrauen erweckt, die aber mit Sicherheit falsch ist.
Also: Haben Sie Mut zur Ungenauigkeit, solange die Größenordnung stimmt. Dann bekommen Sie mit etwas Übung das Reich der Zahlen in den Griff.

«AUSGERECHNET» Auf der Erde leben 6,5 Milliarden Menschen. Wenn sie alle dicht gedrängt nebeneinanderstünden, wie bei einem Rockkonzert – hätten sie dann auf dem Bodensee Platz? Erst schätzen, dann rechnen! (Der Bodensee hat eine Fläche von 536 Quadratkilometern.)
Auflösung unter *www.rowohlt.de/mathematikverfuehrer*